تکلیف کلاسی شمارهٔ ۲

مقدمه و فرضیات مسئله:
پایپ‌لاین سیستم Football AI با موفقیت اجرا شده است. ما اکنون برای هر فریم t (با نرخ FPS برابر با 30)، مختصات دقیق و انتقال‌یافته‌ی بازیکنان $\mathbf{P}_i(t) = (x_i, y_i)$ در فضای دوبعدی (2D Top-Down Map) و همچنین مختصات توپ $\mathbf{B}(t) = (x_b, y_b)$ را بر حسب متر در اختیار داریم. همچنین تیم هر بازیکن (Team ID) و شناسه‌ی یکتای او (Tracker ID) مشخص است. با استفاده از این خروجی‌ها، به عنوان مهندسِ داده‌های ورزشی (Sports Data Engineer) به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱. **استخراج گراف پاس‌کاری (Pass Network Extraction): (2.5 نمره)**
مربیان برای تحلیل تاکتیک تیم، نیازمند مشاهده‌ی شبکه‌ی پاس‌کاری بین بازیکنان هستند. یک پاس، زمانی رخ می‌دهد که توپ از کنترل بازیکن A خارج شده و به کنترل بازیکن B دربیاید.

- با استفاده از فاصله‌ی اقلیدسی (Euclidean Distance) بین توپ $\mathbf{B}(t)$ و بازیکنان $\mathbf{P}_i(t)$، یک منطق ریاضی (Heuristic) یا شبه‌کد طراحی کنید که رویداد «ثبت یک پاس موفق» را تشخیص دهد.
- چگونه با استفاده از یک Time Window (مثلاً $\Delta t > 0.5$ ثانیه) جلوی خطای تشخیصِ پاس‌های کاذب (هنگام درگیری چند بازیکن بر سر توپ) را می‌گیرید؟

۲. **ارزش‌گذاری فضایی و امید گل (Expected Threat / xT): (3 نمره)**
خروجیِ دیاگرام کنترل فضای ورونوی (Voronoi Diagram) که در کلاس ساختیم، تنها نشان می‌دهد «چه کسی بر چه مساحتی» تسلط دارد؛ اما ارزشِ محوطه‌ی جریمه با گوشه‌ی زمین برابر نیست!

- فرض کنید مرکز دروازه‌ی حریف در مختصات $\mathbf{G}_{opp} = (x_g, y_g)$ قرار دارد. یک تابع ریاضی پیوسته (Decay Function یا مشابه آن) پیشنهاد دهید که نقشه ورونوی خام را با معیار «احتمال ایجاد خطر یا xT» ترکیب کند.
- توضیح دهید مربی چگونه می‌تواند از این «نقشه‌ی کنترلِ ارزش‌گذاری‌شده» برای اصلاحِ جای‌گیریِ خط هافبک خود استفاده کند؟

۳. **تحلیل دوندگی و فیلترینگ سینماتیک (Sprint & Fatigue Analysis): (2.5 نمره)**
ما می‌خواهیم سرعت لحظه‌ای هر بازیکن $v_i(t)$ و مجموع مسافت طی‌شده (Distance Covered) را برای بررسی خستگی (Fatigue) محاسبه کنیم.

- فرمول محاسبه‌ی $v_i(t)$ بر حسب کیلومتر بر ساعت (km/h) بین دو فریم متوالی را بنویسید.
- می‌دانیم که ردیاب‌ها (حتی الگوریتم‌های پیشرفته مانند ByteTrack) گاهی دچار پرش‌های ریز یا Jitter در کادرها می‌شوند. این پرش‌های 1 یا 2 پیکسلی در ماتریس هوموگرافی (Homography Matrix) تقویت شده و ممکن است به عنوان یک استارت سریع (Sprint) با سرعت 35 کیلومتر بر ساعت ثبت شوند! برای حل این بحران نرم‌افزاری، استفاده از چه نوع فیلتری (مانند Low-Pass Filter یا Moving Average) را پیشنهاد می‌دهید و چرا؟

۴. **تشخیص خودکار خط آفساید (Automated Offside Line): (2 نمره)**

اگر فرض کنیم محور X نشان‌دهنده‌ی طول زمین است و تیم مهاجم به سمت مقادیر مثبتِ X حمله می‌کند:

- یک قانون منطقی (Rule-based Logic) با استفاده از مختصات $\mathbf{P}_i(t)$ بنویسید که در لحظه‌ی ارسالِ پاس (که در سوال 1 به دست آوردید)، خط آفساید (VAR Offside Line) را محاسبه کرده و در صورت حضور مهاجم در پشت این خط، یک Flag یا هشدار برگرداند. (فرض کنید دروازه‌بان حریف همیشه در انتهای زمین است).